Mathematik

für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Arbeitsbuch

Einfacher Einstieg

von Thomas Köhler

Deutscher Betriebswirte-Verlag GmbH

Mathematik für
Wirtschaftswissenschaftler

Thomas Köhler

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Arbeitsbuch

Einfacher Einstieg

Deutscher Betriebswirte-Verlag GmbH, Gernsbach

Bibliografische Informationen der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://www.ddb.de abrufbar.

Druck: BoD, Norderstedt
ISBN: 978-3-88640-145-1

Vorwort

Bekanntlich stellen die Veranstaltungen zur Mathematik mit den anschließenden Prüfungen ein erhebliches Hindernis im Verlauf wirtschaftswissenschaftlicher Studiengänge dar – an Universitäten ebenso wie an Fachhochschulen. Dieses Problem wird nie ganz zu beseitigen sein; wer diese Fächer studiert, muss nicht notwendig vorher in der Schule besonders gut in Mathematik gewesen sein – und die Numerus clausus-Regeln zum Studium der Wirtschaftswissenschaften selegieren wenig in diesem Sinne.
Dieser Situation müssen sich die Lehranstalten in gewissem Sinne anpassen, nicht unbedingt, indem sie ihre Anforderungen herabsetzen, sondern indem sie gezielter das diesbezügliche Vorwissen und die Fähigkeiten der Studierenden berücksichtigen; sie sollten nicht mit ihnen umgehen wie mit angehenden Mathematikern und sie mit schwierigen sowie zur Darstellung letztlich vermeidbaren Begriffen wie „Äquivalenzrelationen" oder „Indexmengen" überhäufen, überhaupt den Stoff knapper halten und dafür mehr mit Beispielen unterlegen. Oft besteht eine auffällige Diskrepanz zwischen dem, was in den Vorlesungen zu vermitteln versucht wurde und den dann sehr viel einfacheren und sich über Semester wiederholenden Klausurfragen – deren Standardbeantwortung zudem nicht selten noch in speziellen universitären und außeruniversitären Paukkursen eingebläut wird.
Das vorliegende kleine Buch versucht, direkt die Vorkenntnisse und die mathematischen Stärken der Studierenden zu berücksichtigen, wiederholt – so abwegig dies erscheinen mag – zunächst das, was aus der Schule mitgebracht werden sollte, aber oft eben nicht mitgebracht wird: Rechnen mit Brüchen, Potenzen und Ungleichungen. Stärker als die meisten vergleichbaren Lehrbücher führt das vorliegende in die Algebra ein, also die prinzipiellen Arten mathematischer Verknüpfungen, und arbeitet auf dieser Basis Unterschiede zwischen den Zahlenarten heraus, etwa den wesentlichen Unterschied zwischen den rationalen und den reellen Zahlen, schließlich auch den Sinn der Erweiterung zur Menge der komplexen Zahlen. Bei diesen Darstellungen wird an einfachen Beispielen geübt, insbesondere die praktisch höchst bedeutsame Nullstellenbestimmung reell- und komplexwertiger Polynome durchgearbeitet. Die vielen offenbar ein permanentes Rätsel bleibende vollständige Induktion wird an mehreren Beispielen vorgestellt und auf grundsätzliche Fehlermöglichkeiten bei dieser Behandlung dieser Probleme verwiesen. Die beiden letzten Kapitel über Vektoren und Matrizen sind ebenfalls wieder einfach und relativ stoffarm gehalten; sie versuchen jedoch, wichtige und dabei nicht allbekannte Sachverhalte deutlich herauszuarbeiten, etwa dass die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren nicht bedeutet, dass jeder mit

jedem lineare Abhängigkeit aufweist, nicht einmal, dass ein einziges der drei Paare wechselseitig linear abhängig sein muss.
Um den eigentlichen Stoff ballastarm und klar gegliedert zu halten, wurde vieles in die Anmerkungen verlegt, die man lesen kann, aber nicht unbedingt muss. Sie enthalten teilweise Anekdotisches, so die Herkunft des Wortes „Algorithmus“ oder die ursprüngliche Bedeutung von „trivial“, daneben aber auch mathematische Ergänzungen (z. B. den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, die allgemeinere Einführung der Vollständigkeit eines Körpers mittels des Cauchyschen Folgenkriteriums oder den Austauschsatz von Steinitz), die nicht uninteressant sind, aber im Text eher ablenken und Verwirrung stiften.
Das Buch ist programmatisch für das Selbststudium konzipiert, deswegen nicht nur die zuweilen etwas saloppe, „vorwissenschaftliche“ Ausdrucksweise und die zahlreichen im Text vorgerechneten Beispiele, sondern auch die Übungsaufgaben am Ende der einzelnen Abschnitte, zu denen im Anhang ausführliche kommentierte Lösungen stehen.
Frau Regina Meier vom Deutschen Betriebswirte-Verlag danke ich sehr für die spontane Annahme meines Publikationsangebots sowie Frau Marina Lang für die wertvollen Ratschläge bei der Textgestaltung und ihre ausgesprochen gründliche Lektorierung; die mit Sicherheit vorhandenen mathematischen Fehler gehen selbstverständlich ganz zu meinen Lasten. Sehr verbunden bin ich einmal mehr Ingmar Böschen, der mit seinem enormen Computer-Know-How sowie mit seiner effizient-sachlichen Art mir schon viel Geld und Zeit gespart hat und auch bei diesem Buch wieder sehr half. Und wie immer der Dank an meine liebe Frau Carmen für ihr Verständnis, wenn ich mit ihrem Laptop an unseren gemeinsamen Wochenenden mich zu sehr mit Mathematik beschäftigt habe.

Hamburg, den 1. August 2010 Thomas Köhler

Inhaltsverzeichnis

1 Erinnerung an die Schulmathematik

Wem dies alles in der Schule vermittelt wurde und wer es auch nicht wieder vergessen hat, kann dieses Kapitel ohne Schaden überspringen oder zumindest diagonal lesen, zumal die wesentlichen Aussagen (wenn auch stärker mathematisch formalisiert) noch einmal im Abschnitt über Zahlenarten präsentiert werden (s. Kap. 3). Es wird jedoch schwer sein, die in diesem Buch präsentierte „höhere Mathematik“ zu verstehen bzw. praktisch anzuwenden, wenn elementare Kenntnisse der Bruchrechnung und weiterer einfacher Algebra fehlen – und dies ist selbst bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften erfahrungsgemäß keineswegs selten. Wer also ohne Zögern bei Brüchen aus den Summenausdrücken im Zähler und Nenner ein- und dieselbe Zahl wegstreicht („kürzt“), wer denkt, dass die Wurzel einer Summe gleich den addierten Wurzeln der einzelnen Summanden ist oder wer das Quadrat eines Summenausdrucks für identisch mit den summierten Quadraten der Einzelelemente hält, sollte sich deshalb ruhig etwas gründlicher bei diesem Kapitel aufhalten.

1.1 Rechnen mit Brüchen

Diejenige Zahl, die, um ein einfaches Beispiel zu geben, mit 5 multipliziert den Wert 1 ergibt – in Kap. 3 werden wir sie als „multiplikativ inverses Element“ von 5 einführen und mit 5^{-1} symbolisieren –, heißt bekanntlich der „Kehrwert von 5“ und wird in der praktischen Bruchform, nämlich als $\frac{1}{5}$, geschrieben. Nicht nur die einfache natürliche Zahl 5 hat ihren Kehrwert, sondern jede reelle Zahl, z. B. auch die irrationale Zahl π, deren Inverses man analog als $\frac{1}{\pi}$ schreibt. Eine einzige Ausnahme bildet die 0, welche kein multiplikativ inverses Element besitzt (s. Kap.3.1). **Man darf also nie, aber auch wirklich niemals einfach durch 0 dividieren**. Was man lediglich tun kann, ist durch eine nahe bei 0 liegende, also eine kleine Zahl h, dividieren und beobachten, was passiert, wenn dieses h immer näher an 0 heranrückt.

Unter der Zahl $\frac{3}{5}$ versteht man das mit 3 multiplizierte Inverse von 5, also $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$.

Bekanntlich darf man Zähler und Nenner mit derselben Zahl – ausgenommen wiederum der 0 – **multiplizieren** („erweitern"), ohne dass sich der Wert des Bruchs verändert, beispielsweise:

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{18}{30}.$$

Umgekehrt lassen sich – ohne Veränderung des Bruchwerts – Zähler und Nenner durch **dieselbe** (von 0 verschiedene) Zahl dividieren (darf „gekürzt" werden), also:

$$\frac{18}{30}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{3\cdot \cancel{6}}{5\cdot \cancel{6}}=\frac{3}{5}.$$

Keineswegs aber darf man – und dies ist leider nicht immer bekannt und daher nachdrücklich zu betonen – im Zähler und Nenner heraus ungestraft Summanden **wegstreichen.** In aller Regel gilt nämlich:

$$\frac{x+y}{x+z}\neq\frac{y}{z}\text{, z. B. }\frac{18}{30}=\frac{10+8}{10+20}\neq\frac{8}{20}.$$

Bevor wir zur Multiplikation und Division von Brüchen kommen, sei daran erinnert, dass jede Zahl immer auch als Bruch geschrieben werden kann, z. B.

$$7=\frac{7}{1}.$$

Bei der Multiplikation von zwei Brüchen multipliziert man den Zähler des ersten Bruchs mit dem Zähler des zweiten, den Nenner des ersten mit dem Nenner des anderen, beispielsweise:

$\frac{18}{30}\cdot\frac{6}{12}=\frac{18\cdot 6}{30\cdot 12}$; da in Zähler und Nenner nur Produkte stehen, lässt sich kürzen, zunächst etwa durch 6 und damit $\frac{18}{30}\cdot\frac{6}{12}=\frac{18\cdot 6}{30\cdot 12}=\frac{18}{30\cdot 2}$, dann noch einmal durch 3, somit $\frac{18}{30}\cdot\frac{6}{12}=\frac{18}{30\cdot 2}=\frac{6}{10\cdot 2}$ und schließlich durch 2, womit wir (nach ziemlichen Umwegen) schließlich den Wert von $\frac{18}{30}\cdot\frac{6}{12}=\frac{3}{10}$ erhalten. Oder: $18\cdot\frac{6}{7}=\frac{18}{1}\cdot\frac{6}{7}=\frac{18\cdot 6}{1\cdot 7}=\frac{108}{7}$. Vor dem **Multiplizieren von Brüchen** muss man also – anders als vor dem Addieren und Subtrahieren – **nicht** erst einen **gemeinsamen Nenner** suchen. (Es würde zwar nicht schaden, wäre aber überflüssiger Aufwand, zumal im Anschluss an die Multiplikation die Aufgabe des Kürzens hinzukäme.)

Bei der Division von Brüchen multipliziert man den zu dividierenden Bruch (den Dividenden) mit dem Kehrwert der teilenden Bruchzahl (des Divisors), also $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$; etwa:

$\frac{3}{2}:\frac{6}{14}=\frac{3}{2}\cdot\frac{14}{6}=\frac{3\cdot 14}{2\cdot 6}=\frac{7}{2}$ oder: $\frac{3}{4}:6=\frac{3}{4}:\frac{6}{1}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 6}=\frac{1}{8}$ oder:

$7:\frac{2}{3}=\frac{7}{1}:\frac{2}{3}=\frac{7\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{21}{2}$. Am Ende der Rechnung, aber erst **dann**, kann es sinnvoll sein, das Resultat anders darzustellen, $\frac{21}{2}=10\,{}^{1}\!/_{2}$ oder $10{,}5$.

Genauso ist vorzugehen, wenn die Divisionsaufgabe in Bruchdarstellung gegeben ist:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\text{ beispielsweise } \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{6}}=\frac{4}{5}:\frac{5}{6}=\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}=\frac{24}{25}.$$

Stehen nur drei Zahlen in diesen „Doppelbrüchen“, so ist entscheidend, wo der „Hauptbruchstrich“ liegt, wie am folgenden Beispiel zu ersehen.

$$\cfrac{7}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{1}:\frac{2}{3}=\frac{7\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{21}{2},\text{ aber } \cfrac{\frac{7}{2}}{3}=\frac{7}{2}:\frac{3}{1}=\frac{7\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{7}{6}.$$

Besitzen zwei Brüche den gleichen Nenner, so ist die Addition (wie die Subtraktion) einfach: Das Resultat ist wiederum ein Bruch, bei dem unten der „gemeinsame Nenner“ steht, der Zähler sich durch Addition (Subtraktion) der beiden Zähler der Brüche ergibt; also:

$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}=2\,{}^{1}\!/_{3}$ oder $\frac{3}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3-5}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}=-0{,}25$.

Besitzen zwei oder mehr Brüche keinen gemeinsamen Nenner, so muss man sich einen solchen suchen, indem man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit einer Zahl a multipliziert (den Bruch „erweitert“), den zweiten mit einer Zahl b erweitert, sodass die resultierenden Brüche einen gemeinsamen Nenner besitzen. Zum Beispiel:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}=1\,{}^{7}\!/_{12}.$$

Analog geht man bei drei oder mehr Brüchen vor, wobei die Entdeckung des „kleinsten gemeinsamen Nenners“ oft gewisse Findigkeit erfordert:

$$\frac{3}{5}-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}-\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}+\frac{1\cdot 15}{2\cdot 15}=\frac{18}{30}-\frac{25}{30}+\frac{15}{30}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}.$$